Correction du TD 1 de traitement du signal

Préliminaire et avertissement

Cette correction de TD est relativement détaillée du point de vue des méthodes et moins du point de vue des calculs. Ceci ne signifie pas qu'ils soient moins importants. Ils le sont tout autant mais ils sont supposés acquis : ils ne sont pas l'objet de ce cours mais de votre formation précédente. Pour certains (la plupart j'espère !) la correction sera trop détaillée, c'est parce qu'elle est en partie construite à partir de questions posées pendant les séances.

L'accent a également été mis sur la rédaction. Outre le fait qu'elle doit permettre une compréhension plus approfondie, c'est également un <u>exemple</u> pour la rédaction de vos futures évaluations.

Une correction détaillée peut être utile pour approfondir un point particulier. C'est également un <u>piège</u>. Sa lecture vous donnera rapidement l'impression que d'une part la question était facile et que d'autre part vous savez faire. C'est bien souvent un leurre ! Il faut avoir "butté" sur l'exercice suffisamment longtemps en séance encadrée pour que son étude, et non sa simple lecture, apporte réellement un plus à votre formation et à votre savoir-faire. Le TD supplémentaire à faire pour la semaine suivante est un moyen de mesure (pour le professeur <u>et</u> pour l'étudiant) de l'accroissement de votre savoir et de votre savoir-faire au fur et à mesure des <u>cours</u> et des TD.

Exercice 1

1. Par définition on a (voir cours de mathématique d'ISEN 3) :

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_{a,b}(t)\pi_{c,d}(\tau - t)dt$$

Le signal $\pi_{c,d}(\tau - t)$ se déduit aisément de la définition du signal $\pi_{c,d}(t)$. En effet, $\pi_{c,d}(t)$ est non nulle est égale à 1 si $t \in [-c;+c]$. Donc le signal $\pi_{c,d}(\tau - t)$ est également non nulle et égale à 1 si $\tau - t \in [-c;+c]$, soit encore si $t \in [\tau - c; \tau + c]$. Compte tenu de ce résultat, les signaux $\pi_{a,b}(t)$ et $\pi_{c,d}(\tau - t)$ son tracés sur la Figure 1 pour une valeur de $\tau - c < -a$ c'est-à-dire $\tau < -a - c$. Une telle valeur de c assure que les deux signaux sont à supports disjoints.

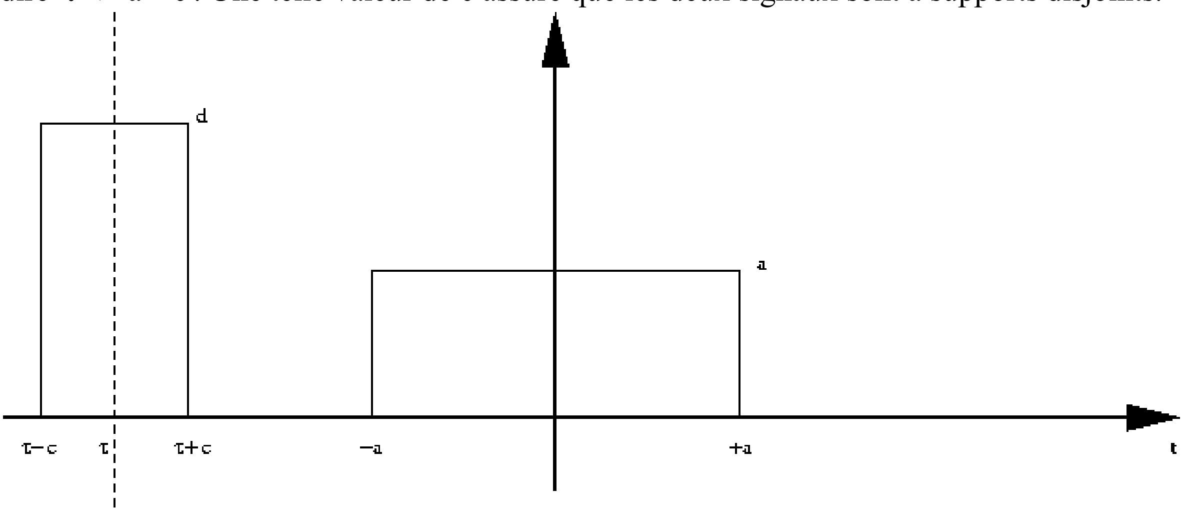

Figure 1 : Les signaux $\pi_{a,b}(t)$ et $\pi_{c,d}(\tau - t)$ si $\tau < -a - c$

2. On voit aisément sur la Figure 1 que si $\tau \le -a-c$ le produit $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau-t)=0$ et donc $h(\tau)=0$.
3. Si $\tau \in [-a-c;-a+c[$, nous sommes en fait dans la situation $\tau-c \le -a$ et $\tau+c > -a$ représentée sur la Figure 2.

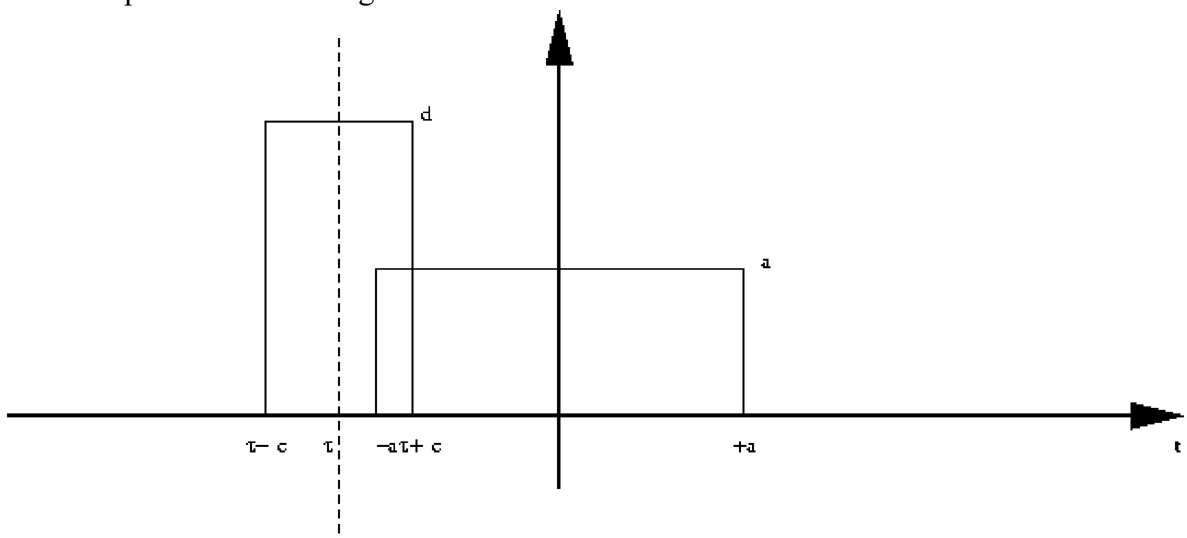

Figure 2 : Les signaux $\pi_{a,b}(t)$ et $\pi_{c,d}(\tau-t)$ si $\tau \in [-a-c;-a+c[$

Le signal $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau-t)$ correspondant est représenté sur la Figure 3.

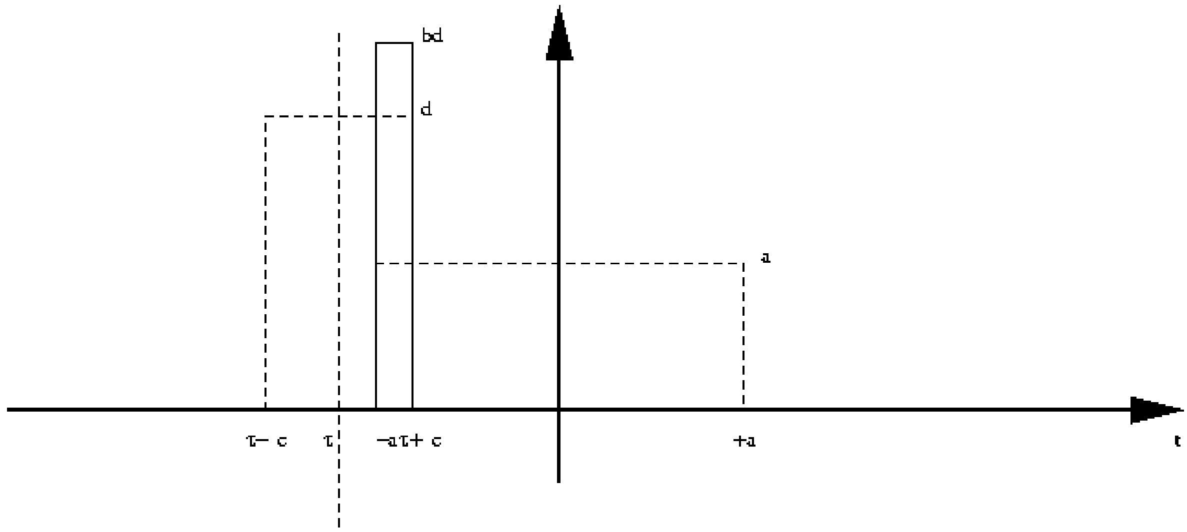

Figure 3 : Le signal $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau-t)$ si $\tau \in [-a-c;-a+c[$ (trait plein)

On voit donc sur cette dernière figure que l'intégrale du produit $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau-t)$ s'interprète aisément comme l'aire d'un rectangle dont les côtés sont de longueur bd et τ+c+a. On a donc $h(\tau)=bd(\tau+c+a)$.

4. Si $\tau \in [-a+c;a-c[$, nous sommes dans la situation $\tau-c \ge -a$ et $\tau+c < a$ (puisque $c \le a$) représentée sur la Figure 4. Le signal $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau-t)$ correspondant est représenté sur la Figure 5. Le produit de convolution est donc égal à $h(\tau)=2cbd$.

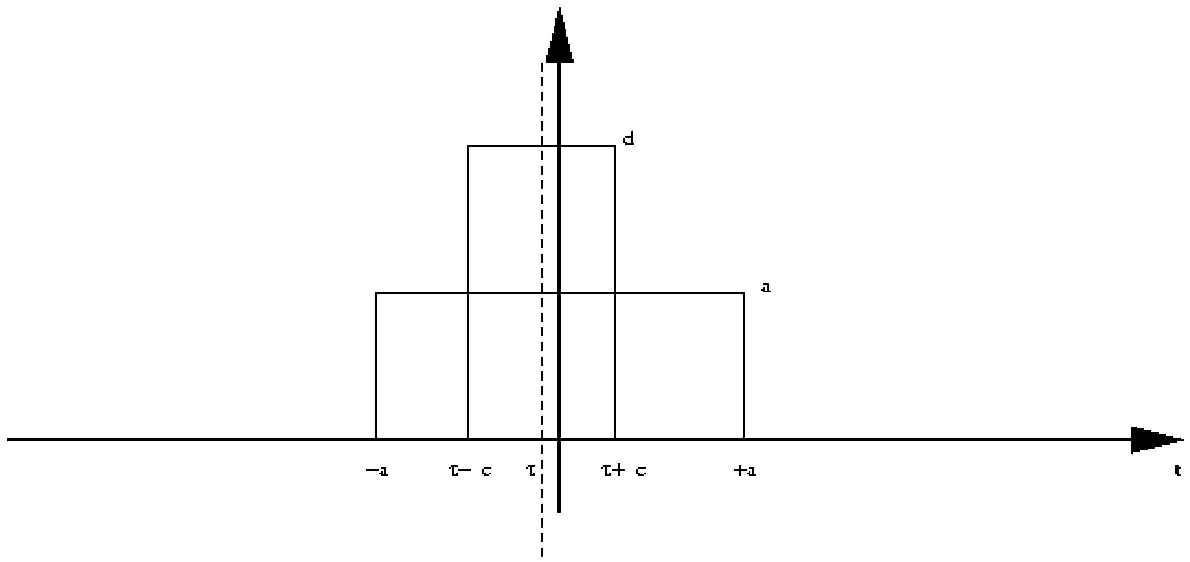

Figure 4 : Les signaux $\pi_{a,b}(t)$ **et** $\pi_{c,d}(\tau - t)$ **si** $\tau \in [-a+c; a-c[$

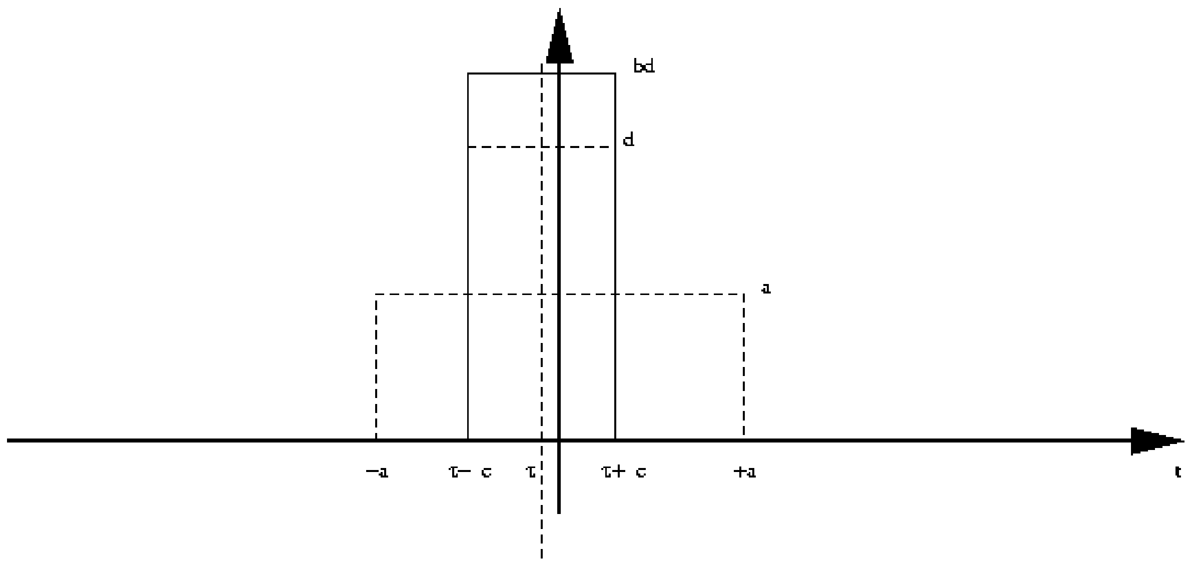

Figure 5 : Le signal $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau - t)$ **si** $\tau \in [-a+c; a-c[$ **(trait plein)**

Si $\tau - c \leq a$ et $\tau + c > a$, nous sommes dans la situation $\tau \in [a-c; a+c[$ représentée sur la Figure 6. Le signal $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau - t)$ correspondant est représenté sur la Figure 7. Le produit de convolution est donc égal à $h(\tau) = bd(\tau + c - a)$.

5. Si maintenant, $\tau - c \geq a$, nous sommes dans la situation $\tau \geq a + c$ représentée sur la Figure 8. Le signal $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau - t)$ correspondant est donc nulle et le produit ce convolution aussi : $h(\tau) = 0$.

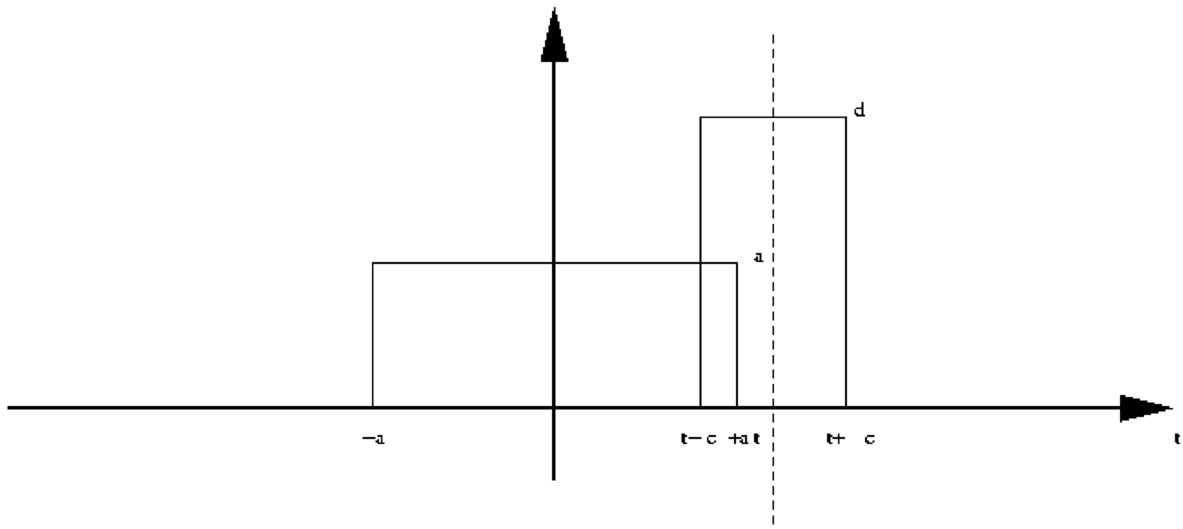

Figure 6 : Les signaux $\pi_{a,b}(t)$ **et** $\pi_{c,d}(\tau - t)$ **si** $\tau \in [-a + c; a - c[$

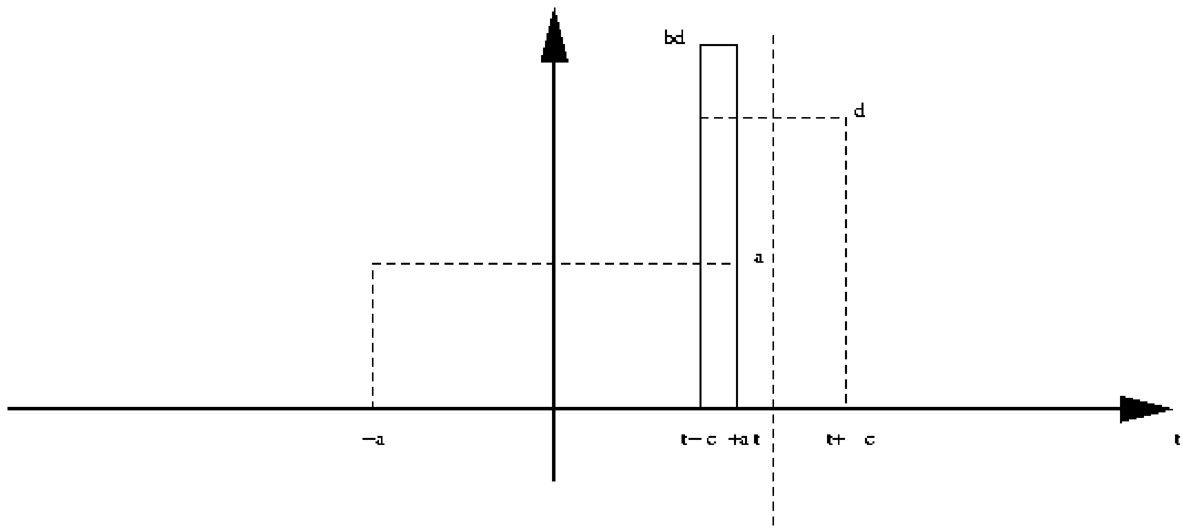

Figure 7 : Le signal $\pi_{a,b(t)}\pi_{c,d}(\tau - t)$ **si** $\tau \in [-a + c; a - c[$ **(trait plein)**

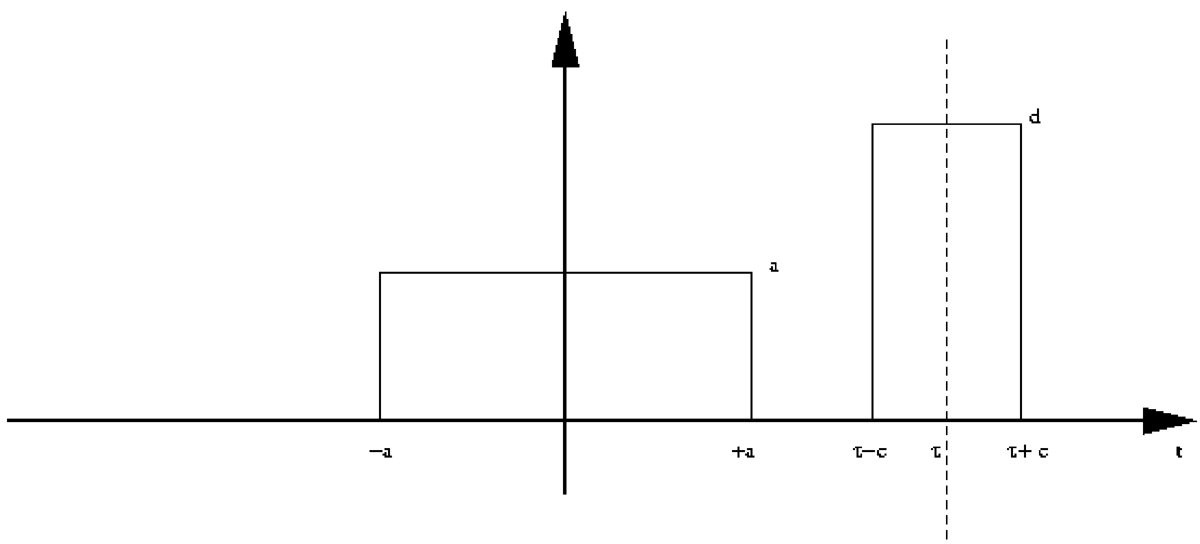

Figure 8 : Les signaux $\pi_{a,b}(t)$ **et** $\pi_{c,d}(\tau - t)$ **si** $\tau \geq a + c$

6. En synthétisant les réponses des questions précédentes, on obtient la définition complète du signal h(τ) :

$$\begin{cases} h(\tau) = 0 & \tau < -a - c \\ h(\tau) = bd(\tau + c + a) & \tau \in [-a - c; -a + c[\\ h(\tau) = 2bcd & \tau \in [-a + c; a - c[\\ h(\tau) = bd(\tau + c - a) & \tau \in [a - c; a + c[\\ h(\tau) = 0 & \tau \geq a + c \end{cases}$$

La fonction h(τ) correspondante est représentée sur la Figure 9.

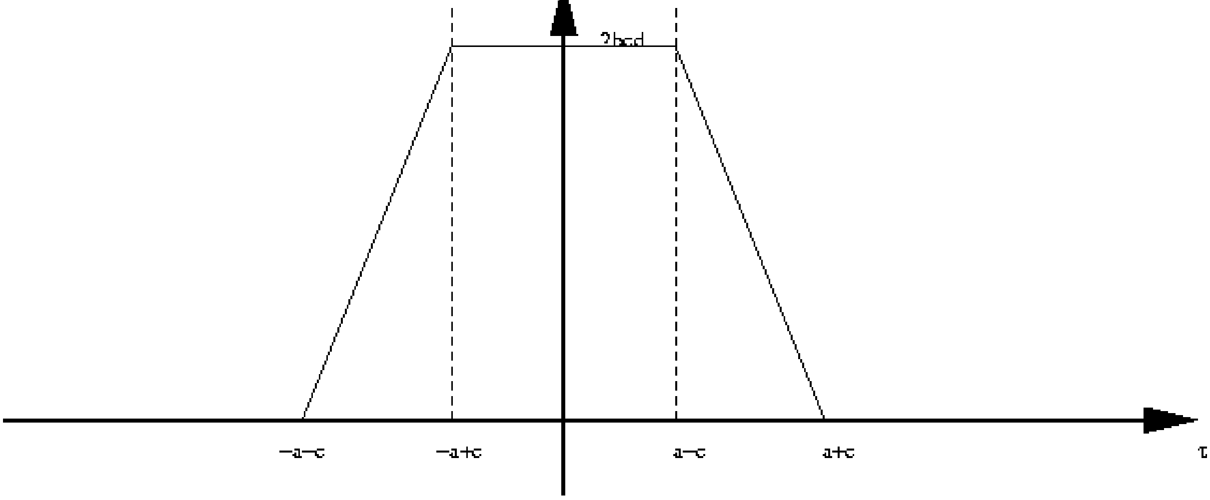

Figure 9 : L'allure du signal h(τ)

__**Synthèse sur la méthode de calcul d'un produit de convolution :**__

Les différentes étapes du calcul du produit de convolution proposées dans cet exercice sont une illustration de "règles" méthodologiques à suivre pour les personnes ayant des difficultés à voir comment on calcule un produit de convolution entre deux signaux x(t) et y(t) :

a) Définir y(τ-t) en revenant à la définition de y(t),

b) Représenter x(t) et y(τ-t) pour une valeur donnée de τ : cela permet de visualiser les différents cas éventuels de calcul,

c) Identifier les différents cas de calcul,

d) Faire évoluer τ de - ∞ à + ∞ et calculer le produit de convolution c'est-à-dire l'intégrale du produit x(t) y(τ-t) pour les cas identifiés au point c.

Remarque 1: dans le cas général, le calcul du produit de convolution nécessite le calcul <u>effectif</u> d'une intégrale.

Remarque 2 : si le signal y(t) est pair alors y(τ-t) = y(-(τ-t))=y(t-τ). y(τ-t) est donc simplement la translation de la quantité τ du signal y(t).

Ce principe a été mis en œuvre dans les questions qui précèdent. Vous pouvez également le visualiser en vous connectant à l'adresse suivante :

http://www.jhu.edu/~signals

Vous cliquez ensuite sur : "Joy of convolution". Vous allez voir apparaître l'interface d'une applet qui va vous permettre de visualiser la méthode précédente. Commencez par sélectionner les deux signaux, ici deux fonctions "porte". Cliquez ensuite sur la partie gauche de la deuxième bande graphique où seront tracés les signaux x et y. En continuant d'appuyer sur le bouton gauche de la souris, glisser vers la partie droite de la fenêtre : vous simuler alors l'évolution de τ de - ∞ à + ∞. Sur la troisième bande graphique vous voyez apparaître le produit $x(t)y(\tau\text{-}t)$ et sur la quatrième bande graphique le produit de convolution. Vous pouvez ensuite choisir d'autres signaux de base qu'il et possible de modifier à la souris.

7. D'après le cours, on a directement :

$$\Pi_{a,b}(\nu) = 2ab\,\mathrm{sinc}(2\pi a\nu)$$
$$\Pi_{c,d}(\nu) = 2cd\,\mathrm{sinc}(2\pi c\nu)$$

8. Le signal $x_1(t)$ est un signal de type h(t) si :

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ a - c = 0 \\ 2bcd = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ bd = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il existe donc un infinité de signaux portes dont la convolution est égale au signal $x_1(t)$. On peut choisir par exemple

$$b = d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de sorte que le signal $x_1(t)$ est la convolution de $\pi_{1,\frac{1}{\sqrt{2}}}(t)$ avec lui-même ce qui simplifiera les calculs par la suite.

9. D'après les questions 8 et 7, on a :

$$x_1(t) = (\pi_{1,\frac{1}{\sqrt{2}}} * \pi_{1,\frac{1}{\sqrt{2}}})(t) \Leftrightarrow X_1(\nu) = (\Pi_{1,\frac{1}{\sqrt{2}}}(\nu))^2 = (\frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{sinc}(2\pi\nu))^2 = 2\,\mathrm{sinc}^2(2\pi\nu)$$

Le spectre du signal $x_1(t)$ est donc réel positif. Il vient immédiatement que :

$$|X_1(\nu)| = 2\,\mathrm{sinc}^2(2\pi\nu)$$
$$\Phi(\nu) = 0$$

10. D'après le cours, le spectre $\Pi_{1,\frac{1}{\sqrt{2}}}(\nu)$ s'annule si $\nu = \frac{k}{2}$ avec k un entier non nul. L'allure de ce spectre est également donnée en cours. Il est représenté sur la Figure 10 pour la fonction particulière $\Pi_{1,\frac{1}{\sqrt{2}}}(\nu)$.

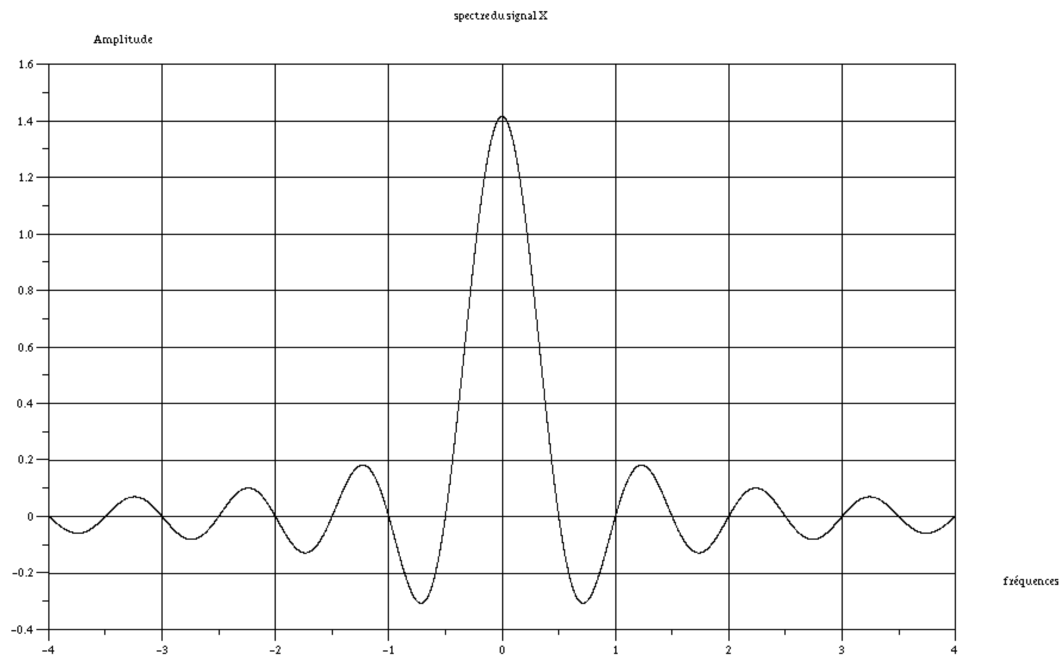

Figure 10 : Le spectre $\Pi_{1,\frac{1}{\sqrt{2}}}(\nu)$

On en déduit aisément le spectre et donc le spectre d'amplitude du signal $x_1(t)$. Ce dernier est représenté sur la Figure 11.

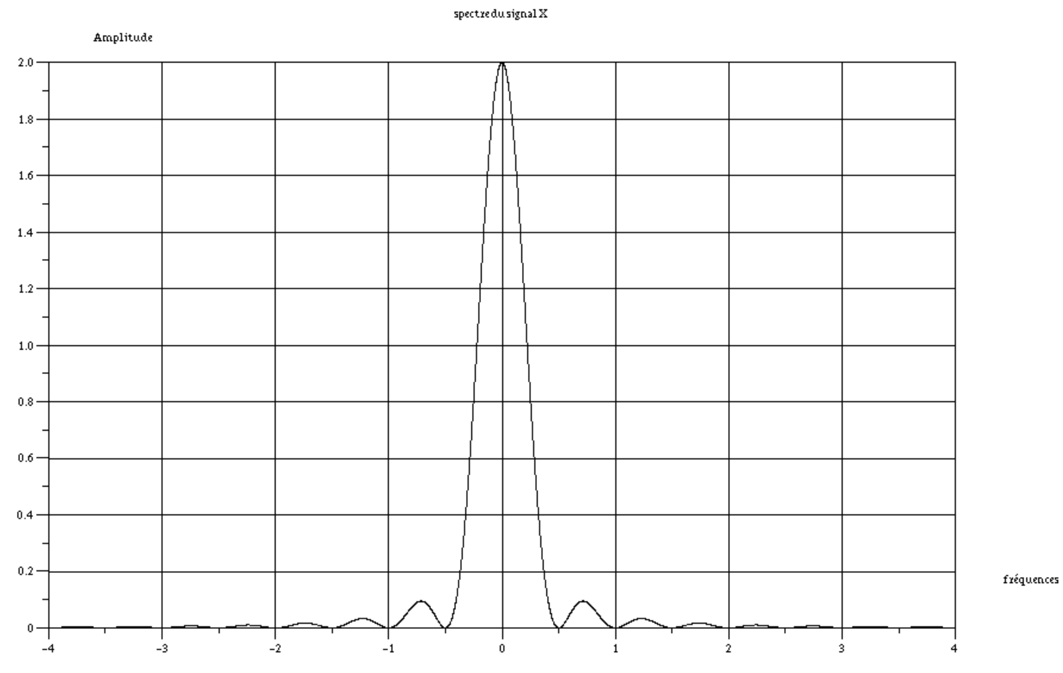

Figure 11 : Le spectre du signal $x_1(t)$

Exercice 2

On appelle x(t) le signal "porte" d'amplitude A défini sur [-T,T] et y(t) un sinus cardinal de type $\sin(at)/at$. y(t) est une fonction paire donc y(τ-t) est la translation de la quantité τ du signal y(t). Le produit de convolution est donc égal par :

$$A\int_{-T}^{T}\frac{\sin(a(\tau-t))}{a(\tau-t)}dt$$

Les signaux x(t) et y(τ-t) sont représentés sur la Figure 12 pour τ "très négatif" représentant le cas τ proche de -∞.

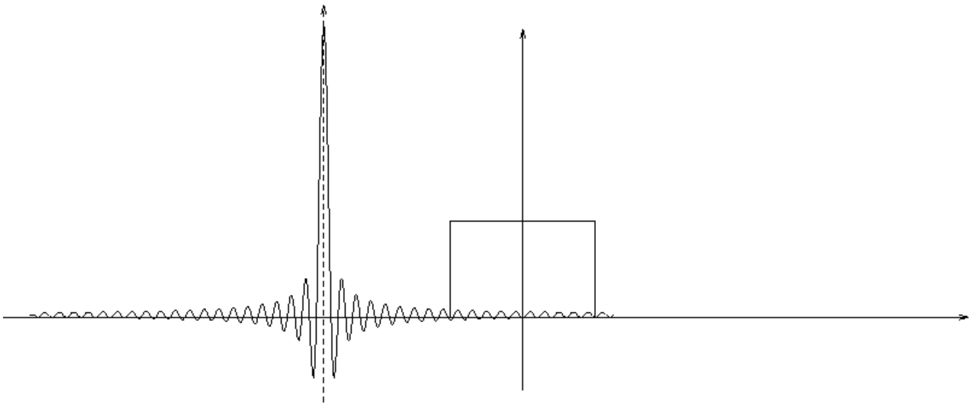

Figure 12 : x(t) et y(τ-t) pour τ "très négatif"

D'après cette dernière figure on peut déduire plusieurs étapes pour le calcul du produit de convolution :

a) τ est très négatif : le lobe principal n'a pas d'intersection avec le support de la fonction porte : l'intégration se fait sur des alternances positives-négatives d'amplitude croissantes au fur et à mesure que τ augmente. Il en résulte donc un produit de convolution qui oscille également.

b) τ est tel que le lobe principal de y(τ-t) commence à "rentrer" dans la porte. Cette situation est représentée sur la Figure 12. D'après le cours, le lobe principal possède une amplitude plus importante que les lobes secondaires et il est deux fois plus large. Le produit de convolution est principalement égale à l'intégrale de la partie concernée du lobe principal. Donc, au fur et à mesure que le lobe principal "entre" dans la porte, le produit de convolution augmente.

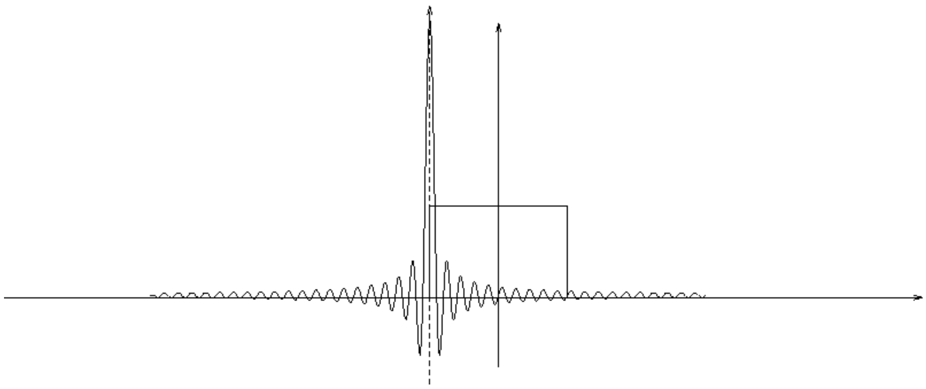

Figure 13 : Le lobe principal commence à entrer dans la porte

c) τ est tel que le lobe principal est entièrement dans la porte. Cette situation est représentée sur la Figure 14. Son aire se trouve modulée par les alternances positives-négatives des lobes secondaires de plus faible amplitude. On reste donc, en oscillant, autour du niveau moyen imposé par le lobe principal.

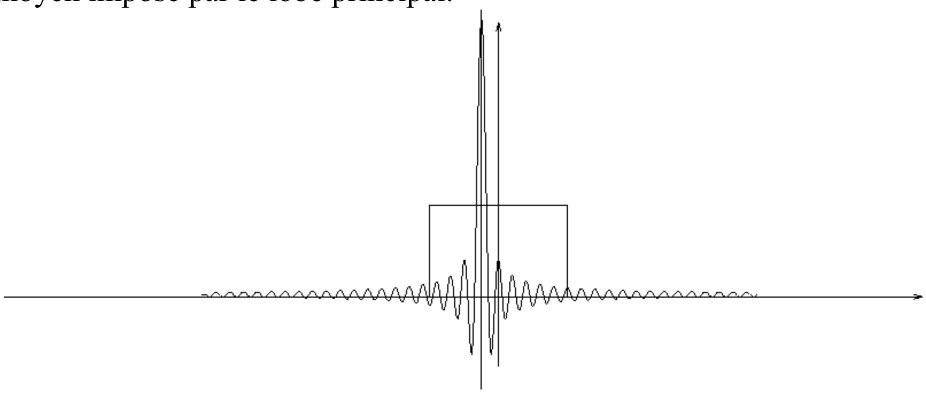

Figure 14 : le lobe principal est dans la porte

d) si τ continu à augmenter on retrouve des situations symétriques de celles décrites aux points a, b et c.

On déduit de ce qui précède l'allure du produit de convolution. Ce dernier est représenté sur la Figure 15.

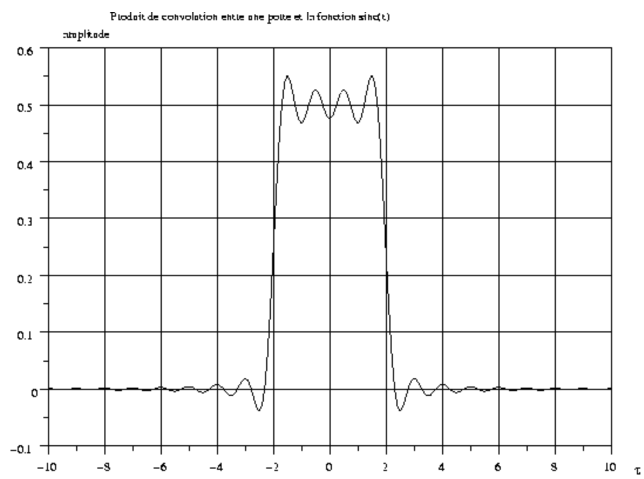

Figure 15 : Allure du produit de convolution

Remarque générale sur la convolution : la convolution élargit le support des signaux. Cela se marque aisément sur l'exercice 1 : le signal issus de la convolution possède un support d'amplitude 2(a+c) alors que les signaux de base avaient des supports d'amplitude respectives 2a et 2c. Dans l'exercice 2, le signal porte a support borné est transformé en en signal de support infini et les discontinuités de pente infinie se sont transformées en portions de courbe dont les tangentes ont des pentes finies.

Toutes les figures ont été réalisées à partir de simulations effectuées avec Scilab. Toutes les fonctions nécessaires sont contenues dans le fichier "td1-signal.sci".